De la Quadrature du Cercle.

Question proposée aux Géomètres

Si l'on ne connoissoit pas la propriété du Triangle rectangle, on regarderoit comme impossible de convertir deux quarrés en un seul qui leur fut rigoureusement égal en superficie; et l'on n'y parviendroit qu'approximativement par le calcul. Mais en formant avec les bases de ces deux quarrés, un angle droit, puis les unissant au moyen d'une troisieme ligne appellée l'hypothénuse, cette ligne dont la longueur est incommensurable avec les deux premieres, est néanmoins la base d'un quarré égal à la somme des deux autres quarrés. Il n'y a à l'égard de l'incommensurabilité des trois côtés du triangle rectangle qu'une seule exception.

Comme il n'y a point non plus de commune mesure entre le diamètre du cercle et sa circonférence on ne le peut quarrer exactement par le calcul. Le rapport unanimement reconnu par les savans comme le plus approximatif est celui de 100. à 314 $\frac{159}{1000}$. Mais la fraction $\frac{159}{1000}$ étant trop foible tandis que $\frac{160}{1000}$ seroit trop fort, on a poussé le calcul beaucoup plus loin, d'où il résulte une suite de décimales dont on embrasse un plus ou moins grand nombre selon le degré d'approximation que l'on veut avoir.

Seroit-il impossible qu'il y eut, par rapport au Cercle, quelque chose de semblable à ce qui a lieu dans le triangle rectangle ~~rectangle~~ et peut-on ~~affirmer~~ qu'on ne trouvera jamais la ligne ou la corde qui quoiqu'incommensurable avec le diamètre, soit néanmoins la base d'un quarré égal au cercle en superficie.

La propriété du triangle rectangle seroit peut-être une vérité encore ignorée si Pythagore ne l'eut découverte: la géométrie en tire un grand nombre d'applications en théorie et en pratique. quant à la quadrature rigoureuse, il y a lieu de croire qu'elle seroit plus curieuse qu'utile puisque le calcul, par six chiffres seulement, donne une approximation plus grande que le besoin ne peut l'exiger. Cependant les plus grands géomètres ont cherché la solution de ce problème. Les académies et les Gouvernemens ont proposé des prix considérables: Mais après tant d'efforts sans succès, il est devenu comme ridicule de s'en occuper.

156 bis

Cette recherche sera peut-être toujours vaine, mais ce n'est point une absurdité, comme généralement on se l'imagine. Aussi les Corps savans n'ont-ils pas déclaré l'impossibilité de cette découverte qui pourroit d'ailleurs, comme beaucoup d'autres être le résultat du hazard.

Sans prétendre à une si heureuse rencontre, je soumets ici aux personnes plus versées que moi dans les sciences mathématiques, une Construction géométrique qui semble singulierement concorder avec ce que donne un calcul très approximatif. Avant d'en venir à la Construction de la figure, il faut chercher d'abord, par la voie ordinaire, la superficie du cercle. Et pour avoir une approximation suffisante, j'ajoute les quatre décimales qui dans le rapport du diamètre à la circonférence viennent à la suite de la fraction $\frac{159}{1000}$. ce qui donnera 10. chiffres, savoir

Diametre 1000000000.... Circonference 3141592653

laquelle circonference multipliée par le demi rayon 250000000.

produit p. la superficie 785,398,163,250,000,000

Et retranchant des decimales 785398.

Construction de la Figure

La figure fait voir qu'après avoir décrit le Cercle, il ne s'agit que de l'enfermer dans un quarré et de tracer les diagonales et les diametres, l'un des quels on divisera en 100. parties, ou en 1000, si l'on fait la figure assez grande pour les y pouvoir marquer.

du point où la Circonférence est coupée par une des diagonales, si l'on abaisse une perpendiculaire en et que, de ce point comme centre, on décrive ~~un~~ l'arc qui à partir de l'angle du quarré, vient couper la même diagonale au point la parallele que l'on tirera par ce point passe, ou du moins paroit passer au point du diamètre ~~quoté~~ 785,398 mettons ~~ou~~ (pour simplifier la fraction 785 $\frac{4}{10}$) par conséquent très peu au dessus du point quoté 785. Sans que l'on puisse apprécier la fraction autrement ni plus exactement qu'on ne l'a eue par le calcul établi plus haut et qui fait voir qu'elle est un peu plus forte que $\frac{398}{1000}$ et un peu plus foible que ~~$\frac{400}{1000}$ ou~~ $\frac{4}{10}$.

Ce rapprochement de l'opération avec ce que donne le calcul paroitra peut-être assez remarquable pour donner lieu de penser que la parallele pourroit couper le diametre a ce point que le calcul ne peut préciser et peut-etre aussi seroit-on curieux d'examiner s'il est possible de démontrer que la chose doive etre ainsi.

Je propose donc la question aux personnes qui familiarisées avec la science, peuvent seules juger si, en effet, il y auroit lieu à déduire, de cette figure, une demonstration ; et si le passage de la parallele sur le diametre, rectifiant la très petite inexactitude qui subsiste nécessairement dans le calcul, ne fixeroit pas géomé-triquement ce point insaisissable, ainsi qu'il arrive dans le triangle rectangle où, malgré le rapport irrationel de ses cotés, le quarré de l'hypothénuse égale la somme des quarrés opposés.

J'ai tracé pareille figure sur un diametre double de celui-ci ce qui est une dimension déja grande sur le papier, et où les milliemes parties ~~pouvant~~ étant sensibles, on peut mieux apprécier le degré d'exactitude. L'opération est délicate et veut une extrême précision On pourroit avec de bons ~~instrumens~~, ~~et~~ sur un plan solide et bien dressé opérer très exactement sur une beaucoup plus grande échelle –

Autre division du diametre

Si l'on vouloit diviser le diametre autrement, par exemple en 12 parties, subdivisées par 12. puis par 10. on auroit 1440. parties cherchant la circonférence par le rapport de 100000000, a 314159265. on trouveroit 452389342032. qui multipl. par le ½ rayon 36000000.

produit p. la superficie ———— 16286016313152 0.

Le diametre 1440 multiplié par 1131. donneroit 162864

au quel produit le sixieme chiffre est trop fort

Mais 1440. multipl. par 1130, 9734. donne ... 1628601696 0.

produit égal au premier jusqu'au huitieme chiffre

Ainsi, par l'opération le diametre de 1440. parties seroit coupé par la parallele, très peu au dessous du point 1131. et se confondroit presqu'avec lui

157bis

Si ce qu'on a vu ne peut être considéré que comme une rencontre fortuite à laquelle on ne puisse appliquer aucune Théorie, la chose parut-elle matériellement vraie, elle ne sauroit satisfaire les savans qui, ne peuvent admettre que ce qui est démontré. Mais du moins pourrat-on convenir que cette construction offre un moyen fort simple de transformer un cercle en un quarré, sans calculer, ~~et~~ aussi approximativement, ce semble, qu'on y peut parvenir par la voie du calcul et plus que le besoin ne l'exige ordinairement

Voyez la fig. 2. La corde ad, moyenne proportionelle entre le diamètre ac, et sa portion ab, est la base du quarré adef, le quel seroit égal en superficie au Cercle ainsi qu'au rectangle ghik.

Question proposée aux Géomètres

Si l'on ne connaissoit pas la propriété du ~~[illegible]~~ Triangle rectangle, on regarderait comme impossible de convertir deux quarrés en un seul, qui leur fut rigoureusement egal en superficie. On n'y parviendrait qu'approximativement par le calcul. Mais en formant avec les bases de ces deux quarrés un angle droit, puis les unissant au moyen d'une troisième ligne appellée l'hypothénuse, cette ligne dont la longueur est incommensurable avec les deux premieres, est néanmoins la base d'un quarré égal à la somme des deux autres quarrés. Il n'y a, à l'égard de l'incommensurabilité des trois côtés du Triangle rectangle, qu'une seule exception.

Comme il n'y a point non plus de commune mesure entre le diametre du cercle et sa circonférence on ne le peut quarrer exactement par le calcul ~~qu'approximativement~~ Le Rapport unanimement reconnu par les Savans pour le plus approximatif est celui de 100. à 314,159. Mais ~~comme~~ la fraction $\frac{159}{1000}$, ~~est~~ étant trop foible tandis que $\frac{160}{1000}$ seroit trop fort, on a poussé le calcul beaucoup plus loin, d'où il résulte une suite de décimales dont on embrasse un plus ou moins grand nombre, selon le dégré d'approximation que l'on veut avoir.

Est-il impossible qu'il y ait par rapport au cercle quelque chose de semblable à ce qui a lieu dans le triangle rectangle; et peut-on affirmer qu'on ne trouvera jamais la ligne ou la corde qui quoiqu'incommensurable avec le diametre soit néanmoins la base d'un quarré égal au cercle en superficie.

La propriété du triangle rectangle serait peut-être une vérité encore ignorée si Pythagore ne l'eut découverte. De ce que ~~Si~~ ~~jusqu'ici~~, l'on n'a point jusqu'ici résolu géometriquement le problème de la quadrature, doit-on conclure ~~s'ensuit-il~~ qu'il soit insoluble? Cette recherche sera peut-être toujours vaine*; mais ce n'est point une absurdité comme généralement on se l'imagine. Aussi les Corps savans n'ont-ils pas déclaré l'impossibilité de cette decouverte, laquelle pourroit d'ailleurs, comme beaucoup d'autres, être le résultat ~~d'un heureux~~ du hasard.

Sans prétendre à une si heureuse ~~autre heureuse~~ ~~pareille~~ rencontre, je soumets ici aux personnes plus versées que moi dans les sciences mathématiques, une construction géométrique qui semble concorder ~~avec~~ singulièrement avec ~~la rapprocher singulièrement~~ de ce que donnerait un calcul très approximatif

Avant d'en venir à la construction de la figure, il faut chercher d'abord par la voie ordinaire, la superficie du cercle. Pour avoir une grande approximation, j'ajouterai les quatre décimales qui, dans le rapport du diametre à la circonférence viennent à la suite de la fraction $\frac{159}{1000}$. Ce qui donnera 10. chiffres. Savoir, Diametre 1,000,000,000, Circonference 3,141,592,653.
laquelle circonférence multipliée par le demi rayon 250000000.
produit pr la superficie . . . . 785398163250000....
En ~~retranchant~~ des décimales . . . . 785398..........

Construction de la Figure

La figure fait assez voir qu'après avoir décrit le cercle, il ne s'agit que de l'enfermer dans un quarré et de tracer ~~les diametres~~ les diagonales et les diametres l'une desquelles on divisera en 1000. parties ~~ou en 1000~~ qu'il peut marquer si l'on fait la figure plus grande que celle-ci

158bis

Du point où la circonference est coupée par une des diagonales, si l'on fait descendre une perpendiculaire en que de ce point comme centre on décrive l'arc qui de l'angle du quarré vient couper la même diagonale au point la parallele que l'on tirera par ce point passera de même paroit passer au point du diametre 785,398, ou (pour simplifier la fraction) $785 \frac{4}{10}$ par consequent, ~~& comme on le voit~~, très peu ~~au dessus~~ au dessus du point quoté 785. Sans qu'on puisse apprecier la fraction ~~rigoureusement~~ ni plus exactement qu'on ne l'a vu dans le calcul etabli plus haut ~~la quelle fraction~~ qui elle est un peu plus forte que $\frac{398}{1000}$ et plus foible que $\frac{400}{1000}$

autrement

ce qui fait voir

Le rapprochement de l'operation avec ce qu'a donné le calcul pourra paroitra ~~peut-être~~ assez remarquable pour ~~donner à penser~~ faire soupçonner que la parallele ~~peut~~ coupe le diametre ~~au~~ point ~~nécessaire pour donner d'une maniere non conditionnelle exact~~ que les calculs ne peuvent préciser ~~. Et pour rechercher s'il est possible de démontrer géometriquement~~ que la chose doive être ainsi. Je propose donc la question aux personnes qui, familiarisées avec la science, peuvent seules juger ~~si, en effet~~ si en effet, il y auroit lieu à deduire de cette figure une demonstration et si le passage de la parallele sur le diametre rectifiant la très petite inexactitude qui subsiste nécessairement dans le calcul, ne ~~donneroit~~ fixeroit pas géometriquement ~~le résultat rigoureusement exact~~ ; ~~comme dans le triangle rectangle~~ ainsi qu'il arrive dans le triangle rectangle, malgré le rapport irrationel de ses côtés, le quarré de l'hypothénuse egale la somme des quarrés opposés.

au

et peut être seroit-il curieux d'examiner s'il est possible de demontrer

J'ai tracé pareille figure sur un diametre double de celui ci ce qui est une dimension déjà fort grande sur le papier et où les milliemes parties étant sensibles on peut mieux ~~juger de~~ apprecier le degré d'exactitude. l'operation ~~elle exige comme je l'ai dit~~ est delicate, et veut une extrême precision. On pourroit avec de bons instrumens et sur un plan solide et bien dressé opérer très exactement, sur une beaucoup plus grande échelle

~~autre~~ division du diametre

Si l'on vouloit diviser le diametre autrement. par exemple en 12 parties subdivisées par 12. puis par 10, on auroit 1440 parties, cherchant la circonference par le rapport de 1000000000, à 3141592653. on trouveroit 4523893420032, qui multip. par le demi rayon 360000000 produit pour la superficie —————— 162860.163131520.

Le diametre 1440. multiplié par 1131. donneroit . 162864.
auquel produit le sixieme chiffre est trop fort

Mais 1440. par 1130,9734. donne un produit égal au premier jusqu'au huitieme chiffre — — — — 162860.16960

Ainsi par l'opération le diametre de 1440. parties, seroit coupé très peu au dessous du point 1131. et le confondroit presque avec lui

Si la trigonometrie ne fournit pas le moyen d'établir une demonstration, ~~la chose paroit elle~~ peut-elle paraitre ~~materiellement vraie~~, elle ne sauroit satisfaire les savans qui ne peuvent admettre pour vérité que ce qui est ~~demontré mathematiquement~~ ~~et mathem~~ rigoureusement demontré. Mais du moins ~~ce rapport~~ pourroit-on convenir

ce qu'on a vu ne peut être consideré que comme une rencontre fortuite

Question proposée aux Géomètres

On démontre en géométrie que les côtés d'un Triangle rectangle sont incommensurables entr'eux ; que connaissant ou déterminant la longueur de l'hypothénuse, par exemple de 100 parties, son quarré étant 10,000, les quarrés des côtés opposés, pris ensemble, sont également 10000 sans qu'on puisse connaître, qu'approximativement les longueurs de ces petits côtés du triangle. Et réciproquement s'il on connaissoit les longueurs des petits côtés, par conséquent leurs quarrés, on n'en pourroit pas déduire la longueur exacte du grand côté, l'hypothénuse. Il n'y a, à cet égard, qu'une seule exception.

Comme il n'y a pas non plus de commune mesure entre le diamètre ~~du cercle~~ et la circonférence, on ne peut quarrer le cercle qu'approximativement par la voie du calcul. Le rapport unanimement reconnu par les savans comme le plus approximatif, est celui de 100.. à 314,159. Mais la fraction $\frac{159}{1000}$ étant ~~un peu~~ trop foible, tandis que $\frac{160}{1000}$ seroit ~~trop~~ fort, on a poussé le calcul ~~jusqu'à un~~ beaucoup plus loin d'un ~~grand~~ ~~nombre~~ de decimales. ~~au moyen desquels on peut avoir la superficie~~ ~~aussi approximativement~~ qu'on ~~le veut, en embrassant~~ dont l'on embrasse un ~~un~~ plus ou moins grand nombre ~~grand nombre de~~ ~~des~~ de décimales selon le degré d'approximation qu'on veut avoir

il résulte ensuite ~~Peut-on regarder comme~~ est-il impossible qu'il y ait par rapport au cercle quelque chose de semblable à ce qui a lieu dans le triangle rectangle ~~et~~ peut-on affirmer qu'on ne ~~pourra~~ trouvera jamais ~~parvenir à trouver~~ la ligne ou la corde qui quoiqu'incommensurable avec le diamètre soit néanmoins la base d'un quarré égal en superficie au cercle.

~~La~~ Cette propriété du triangle rectangle seroit peut-être ~~encore~~ une vérité encore ignorée si Pythagore ne l'eût découverte. ~~Ca~~, Dès qu'on n'a point jusqu'ici résolu géométriquement le problème de la quadrature, peut-on dire ~~absolument~~ qu'il soit insoluble. Cette recherche sera peut-être toujours vaine mais ce n'est point une absurdité, comme généralement on se l'imagine. Aussi les corps savans n'ont-ils pas déclaré l'impossibilité de cette découverte, laquelle pourroit d'ailleurs ~~aussi~~, comme beaucoup d'autres, être le résultat d'un heureux hazard. sans prétendre à un aussi heureux [illegible]

[illegible] je trouverai ici une figure [illegible] construction qui semble s'approcher de la [illegible] [illegible] [illegible] démonstration [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] géométriquement

Avant d'en venir à la ~~construction~~ de la figure ~~ci-jointe~~, il faudra donc chercher par le calcul, la superficie du cercle.

Pour avoir une ~~assez~~ grande approximation, ~~Nous ajouterons~~ j'ajouterai les quatre ~~[illegible]~~ décimales qui, dans le rapport du diamètre à la circonférence, viennent après la fraction $\frac{159}{1000}$ ce qui donnera 8 chiffres

159bis

Savoir, Diametre 100000000 — Circonférence — 314159265,3
la quelle circonférence multipliée par le demi rayon — 25,0000000
produit pr. la Superficie — 7853981633,25,000
Et, retranchant les décimales — 78539,8.
~~[illegible] qu'on peut ici considérer comme 785400, sauf la rectification qui pourroit resulter de la construction de la figure~~

construction de la figure

Fig. 1re — La figure fait voir qu'après avoir décrit le cercle, il ne s'agit que de l'enfermer dans un quarré et de tracer les diagonales et les diametres l'un des quels on divisera en cent parties ou en mille, si l'on fait la figure ~~d'un diametre~~ plus grande

S'il — Du point où la circonférence est coupée par une des diagonales, on fait descendre une perpendiculaire en Et que, de ce point, comme centre, on décrive l'arc qui coupe la même diagonale au point la parallele que l'on ~~tirera~~ par ce point ~~[illegible]~~ paroit passer ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ au point 785398. ~~ou 785,400~~ * qu'a donné le calcul
ou ~~au~~ pour simplifier la fraction 785,4[illegible]
Cette rencontre deviendra d'autant plus appercevable que la figure sera plus grande. L'opération veut être faite avec beaucoup de précision et les lignes tracées très fines pour qu'elles soient, autant que possible, sans largeur

Supposé donc qu'après avoir opéré soi même, en en grand, on reconnaisse ~~tant que la vue [illegible]~~ que la parallele ~~passe environ au point 785,4[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~on a dit qu'elle coupe l'espace entre 780 et 790, très peu au dessus de son milieu~~, ce rapprochement de l'opération avec le calcul, ~~paroitra peut être~~ assez remarquable pour donner lieu de chercher s'il seroit possible de démontrer géométriquement que la chose doit être ainsi. ~~le centre [illegible] resultant par [illegible] [illegible] construction même de la figure.~~
~~N'étant pas assez géomètre pour examiner une [illegible] question~~
je la propose donc la question aux personnes qui familiarisées avec la ~~la~~ science ~~mathématique~~, peuvent seules juger si, en effet il y auroit lieu à déduire de cette figure, une démonstration: Et si sa construction, rectifiant la très petite inexactitude qui subsiste nécessairement dans le calcul, ne donneroit pas un résultat rigoureusement ~~géométriquement~~ exact: comme dans le Triangle rectangle, malgré le rapport irrationel des lignes, le quarré de l'hypothenuse ~~est~~ égale à la somme des quarrés des petits cotés.

J'ai tracé la semblable figure sur ~~un mètre de~~ diamètre double de celui-ci ce qui est une dimension qu'on peut dire, fort grand, sur le papier, et où les milliemes parties étant sensibles, on peut ~~mieux~~ juger du degré ~~de~~ d'exactitude de l'opération

× ~~d'après le calcul qui precede on voit que la fraction 300/1000 est trop faible et 400/1000~~ seroit ~~trop forte mais aussi la difference est infiniment petite~~

* je dis environ puisqu'il faudroit que le passage de la parallele fut entre les points 785,398 et le point 785,400 ~~[illegible]~~

est délicate, elle exige, comme je l'ai dit, une ~~très grande~~ extrême précision.
avec de bons instruments, on pourroit, sur un plan solidement bien dressé,
tracer aussi exactement ~~la figure~~ la figure, sur une beaucoup plus grande échelle. X
Si la Trigonométrie ne fournit pas le moyen d'établir une démonstration,
La chose (~~quoi elle paroitre~~ paroit-elle matériellement vrai) ~~elle~~ elle ne sauroit satisfaire
les savans, qui ne peuvent admettre pour ~~vrai~~ vérité que ce qui est fondé
~~sur une~~ démonstration mathématiquement. Mais du moins conviendra-
-t-on que cette construction offre un moyen fort simple de convertir
un cercle en un quarré, sans calculer, aussi approximativement qu'on
y pourroit parvenir par la voie du ordinaire calcul, et beaucoup plus que le besoin ne l'exige
ordinairement. Voyez la fig. 2. où la corde ad, moyenne proportionnelle
entre le diamètre ac et sa portion ab, est la base du quarré adef ~~que~~ le quel
seroit égal en superficie au Cercle ainsi qu'au rectangle ghik.

autre division du diamètre

X Si l'on voulait diviser le diamètre autrement, par exemple, en 12 parties
subdivisées par 12. puis par 10, on auroit 1440 parties.

Cherchant la circonférence par le rapport de 1000000000. à 3141592653, on trouveroit
4523893422032. qui multiplié par le demi rayon 360000000. produit pour
la superficie ——————————— 162,860,163,131,520

~~si on~~ en multipliant le diamètre 1440. par 1131. on auroit
162,8640. produit où le 6me chiffre est trop fort. mais
1440. par 1130,9734. donne un produit ~~presque~~ égal au prem. jusqu'au 8e chiffre 162,860,169.

~~Il s'ensuit que~~ par l'opération, le diamètre, divisé
en 1440. parties, seroit ~~en~~ coupé très peu par des moins ~~[illegible]~~ ~~la parallèle les coupant [illegible]~~
des points 1131. ~~[illegible]~~ (comme on peut voir fig. 3. ci ~~confondre [illegible]~~. ce qui concorde ou du moins semble
~~semble~~ être approximativement concorder avec ~~[illegible]~~ le calcul. ~~mais car il s'agit ici d'un~~
~~infiniment petit~~

que cette construction offre un moyen fort simple de transformer un cercle
en un quarré sans calculer, aussi approximativement qu'on y pourroit a semble
parvenir par la voie du Calcul, et plus que le besoin ne l'exige
ordinairement dans la pratique

Voyez ~~la~~ fig. 2. La corde ad, moyenne proportionnelle entre le
diamètre ac et sa portion ab en la base du quarré adef. le
quel seroit égal en superficie au cercle, ainsi ~~quarré~~ qu'au rectangle
ghik.

laquelle on ne puisse appliquer aucune Theorie, la chose parut-elle materiellemt. vraie

Rome, le 182

Académie Royale
de France à Rome.

Le Directeur de l'Académie R.^ale de France,
Chev.^er des Ordres R.^aux de S.^t Michel et de la Légion
d'Honneur, M.^bre de l'Institut de France, &.^a &.^a ...

161bis